Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на второй курс, 2018 год

1. $\boxed{5}$ Найти длину дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$.

2. $\boxed{5}$ Исследовать равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; a)$ и $E_2 = (a; +\infty)$ функциональных последовательности $f_n(x) = \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^4n^2}\right)$ и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

3. $\boxed{5}$ Вычислить $\iint\limits_D xdydz + ydzdx + zdxdy$,

где $D = \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1\right\}$ — поверхность, ориентированная полем внешних нормалей.

4. $\boxed{5}$ Решить задачу Коши: $3y^2y'y'' + 2y(y')^3 = 4y^3$; $\quad y(1) = -1$, $y'(1) = 1$.

5. $\boxed{5}$ Решить уравнение $4x^2y - 2x^3y' + (y')^2 = 0$. Найти особые решения. Изобразить интегральные кривые. Указать дискриминантное множество.

6. $\boxed{5}$ В евклидовом пространстве скалярное произведение векторов $\mathbf{a}(x_1, x_2)$ и $\mathbf{b}(y_1, y_2)$ задано формой $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$. Найти ортонормированный базис, в котором квадратичная форма $g = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$ имеет диагональный вид, а также вид формы g в найденном базисе.

Ответы и решения для поступающих на 2-й курс.

---

1. $\boxed{5}$ Найти длину дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Решение. $l = \int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = [\dots] = \int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\varphi} d\operatorname{tg}\varphi = \int\limits_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right).$$

2. $\boxed{5}$ Исследовать поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0; a)$ и $E_2 = \ (a; +\infty)$ функциональных последовательности $f_n(x) = \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^4 n^2}\right)$ и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Ответ: Последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x) = 0$ равномерно на $E_1 \cup E_2$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится неравномерно на E_1, сходится равномерно на E_2.

Решение. a) При $|x| \leqslant \frac{1}{\sqrt[7]{n}}$ выполняется $|f_n(x)| \leqslant \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt[14]{n}}$,

при $x \geqslant \frac{1}{\sqrt[7]{n}}$ выполняется $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{x^{7/2}\cdot n^2} \leqslant \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[7]{n}}\right)^{7/2}\cdot n^2} = \ \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Значит, при $x > 0$ выполняется $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt[14]{n}} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \to 0, \ n \to \infty$.

b) Так как на E_2 выполняется $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{x^{7/2}\cdot n^2} \leqslant \frac{1}{a^{7/2}n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то по теореме Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E_2. Так как на E_1 $f_n(x) \sim \frac{C}{n^2}$ при $n \to \infty$, то по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на E_1, но по критерию Коши неравномерно: $\forall\, n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \sum\limits_{k=n+1}^{2n} f_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant \sin\frac{1}{4} > 0$.

3. $\boxed{5}$ Вычислить $\iint\limits_D xdydz + ydzdx + zdxdy$, где

$D = \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1\right\}$ — поверхность, ориентированная полем внешних нормалей.

Решение. По формуле Остроградского-Гаусса и ввиду симметрии D имеем:

$I = \iint\limits_D xdydz + ydzdx + zdxdy = 24\iiint\limits_{D'} dxdydz$, где

$D' = \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} \leqslant 1 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\right\}$.

С помощью замены $x = au^3$, $y = bv^3$, $z = cw^3$ и замены $u = r\cos\psi\cos\varphi$, $v = r\cos\psi\sin\varphi$, $w = r\sin\psi$ находим:

$I = 24 \cdot 27abc \iiint\limits_T r^8 \cos^5\psi \sin^2\psi \cos^2\varphi \sin^2\varphi dr d\varphi d\psi$, где

$T = \{0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}\}$.

Произведя вычисления, находим $I = \frac{12}{35}\pi abc$.

4. $\boxed{5}$ Решить задачу Коши: $3y^2y'y'' + 2y(y')^3 = 4y^3$; $\quad y(1) = -1$, $y'(1) = 1$.

Решение. С помощью замены $y' = z$, $y'' = z'z$ получим уравнение Бернулли $z' + \frac{2}{3y}z = \frac{4}{3}yz^{-2}$. Из уравнения Бернулли с помощью замены $u = z^3$ получим линейное уравнение $u' + \frac{2}{y}u = 4y$, откуда $u = y^2 + \frac{C}{y^2}$. Замечая, что $u = (y')^3$ и используя начальные условия находим $C = 0$. Из $(y')^3 = y^2$ и начальных условий находим $y = \left(\frac{x-4}{3}\right)^3$.

5. $\boxed{5}$ Решить уравнение $4x^2y - 2x^3y' + (y')^2 = 0$. Найти особые решения. Изобразить интегральные кривые. Указать дискриминаниное множество.

Решение. $y' = p$. Дифференцируя $4y = 2xp - \frac{p^2}{x^2}$ находим $2p\left(1 - \frac{p}{x^3}\right)dx = 2x\left(1 - \frac{p}{x^3}\right)dp$.

Случай $p = x^3$ приводит к особому решению $y = \frac{1}{4}x^4$.

Случай $pdx = xdp$ приводит к решению $y = Cx^2 - C^2$.

Дискриминантное множество $y = \frac{1}{4}x^4$.

6. $\boxed{5}$ В евклидовом пространстве скалярное произведение векторов $\mathbf{a}(x_1, x_2)$ и $\mathbf{b}(y_1, y_2)$ задано формой $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$. Найти ортонормированный базис, в котором квадратичная форма $g = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$ имеет диагональный вид, а также вид формы g в найденном базисе.

Решение. Матрицы квадратичных форм $k = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$ и g в исходном базисе $\mathbf{e}$ соответственно $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $G = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$. Пусть $\mathbb{A}$ — присоединённое к g линейное преобразование, имеющее в базисе $\mathbf{e}$ матрицу A. Тогда $A = \Gamma^{-1}G$. Линейное преобразование $\mathbb{A}$, присрединённое к квадратичной форме, самосопряжённое, поэтому существует ортонормированный базис $\mathbf{e}'$ из собственных векторов преобразования $\mathbb{A}$. Обозначим G' и A' матрицы квадратичной формы k и линейного преобразования $\mathbb{A}$ в базисе $\mathbf{e}'$ соответственно. Так как базис $\mathbf{e}'$ ортонормированный, то $G' = A'$. Найдём A'. Поскольку $|\Gamma| \neq 0$, характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow |\Gamma^{-1}G - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow |G - \lambda\Gamma| = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 8-\lambda \\ 8-\lambda & 6-3\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 20 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -4$. Аналогично, $(A - \lambda E)\xi = 0 \Leftrightarrow (G - \lambda\Gamma)\xi = 0$, где ξ — столбец координат в базисе $\mathbf{e}$ собственного вектора, принадлежащего собственному значению λ. Решая обобщённое уравнение $(G - \lambda\Gamma)\xi = 0$ для $\lambda = \lambda_1$ и для $\lambda = \lambda_2$, находим соответствующие собственные векторы $h_1 = (3, 1)^T$ и $h_2 = (3, -2)^T$. Длина $|h_1|^2 = k(3, 1) = 18$. Длина $|h_2|^2 = k(3, -2) = 9$. Поэтому $e_1' = \frac{h_1}{|h_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^T$, $e_2' = \frac{h_2}{|h_2|} = \left(1, -\frac{2}{3}\right)^T$. Таким образом, в ортонормированном базисе $\mathbf{e}' =< e_1', e_2' >$ матрица $A' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, и форма $g = 5y_1^2 - 4y_2^2$ имеет диагональный вид.